

## 基于三角形外接圆的轮廓对应算法

陈敏, 张志毅\*, 田素垒, 张 娴

(西北农林科技大学 信息工程学院, 陕西 咸阳 712100)

(\* 通信作者电子邮箱 liurenzu@sohu.com)

**摘要:**针对目前的轮廓对应算法在处理形状复杂的研究对象时容易产生错误的对应关系及计算效率低的问题,提出了基于三角形外接圆的轮廓对应算法。该算法对位于不同截面上的每一个轮廓进行三角剖分,将剖分得到的三角形合法化之后提取其外接圆,通过研究位于相邻截面上的外接圆间的对应关系来确定轮廓间的对应。实验结果表明,该算法能够很好地处理形状复杂的研究对象,具有较好的鲁棒性和实时性。

**关键词:**三角剖分;三角形合法化;外接圆对应;轮廓对应;三维重建

**中图分类号:** TP391.411 **文献标志码:** A

### Contour correspondence algorithm based on circumcircles of triangles

CHEN Min, ZHANG Zhi-yi\*, TIAN Su-lei, ZHANG Xian

(College of Information Engineering, Northwest Agriculture and Forest University, Xianyang Shaanxi 712100, China)

**Abstract:** Since the current contour correspondence algorithms are apt to cause erroneous correspondence relationship and their calculation efficiency is low, a method based on the circumcircles of triangles was proposed in this paper. Each contour in every cross-section was triangulated first, and then the circumcircles of triangles that had been legalized were extracted. By investigating the correspondence relationship among circumcircles, the correspondence relationship among contours, which lay on adjacent cross-sections, can be determined. The experimental results show that the method proposed in this paper can robustly and rapidly process objects of complicated shapes.

**Key words:** triangulation; triangle legalization; circumcircle correspondence; contour correspondence; three-dimensional reconstruction

## 0 引言

随着计算机断层扫描技术和核磁共振等技术的发展,人们容易获得研究对象的一系列断层切片图像,如何由这些二维图像来重构研究对象的三维形状,是近二十年来的研究热点问题<sup>[1]</sup>。通常需先从切片图像中提取出二维轮廓信息,再用二维轮廓来进行形状的三维重建。在形状重构之前,必须解决相邻截面上轮廓间的对应问题。对于简单的研究对象,确定轮廓间的对应关系比较容易,但当研究对象比较复杂(如相邻截面上的轮廓数量不同、形状差异较大)时,要确定其对应关系就很困难。为保证重构得到的三维形状与实际研究对象的一致性,需提出精准、鲁棒的轮廓对应算法。

目前解决轮廓对应问题的典型算法有:Owada等<sup>[2-4]</sup>通过构造Reeb图来确定在哪对轮廓间生成三角面片;Meyers等<sup>[5-6]</sup>提出了最小生成树算法,能很好地处理存在分支的研究对象,但当研究对象中存在嵌套轮廓时不能准确地处理;Kimoto等<sup>[7]</sup>提出了广义柱体算法,其前提是研究对象的形状狭长且轮廓较接近椭圆;Park等<sup>[8-9]</sup>提出了轮廓重叠法,通过计算相邻截面上轮廓对间的重叠率来确定对应关系,但在相邻截面的间距较大,轮廓间错位也很大时不能得到理想的结果;董育宁等<sup>[10]</sup>通过结合几何距离最近和双向最邻近相似准则提高了轮廓对应的准确性和自动化程度。当研究对象中同时存在分支和嵌套轮廓或者位于相邻截面上的轮廓形状不相

似,采用上述算法很难得到理想的结果,Treece等<sup>[11]</sup>提出的基于圆盘的引导插值算法在计算得到圆盘间的对应关系之后通过计算每一截面上各点的插值方向来实现表面重建,虽然能处理研究对象中存在分支或嵌套轮廓的问题,但此方法计算速度慢,数据存数量大。

针对上述问题,本文在Treece等研究的基础上提出了基于三角形外接圆的轮廓对应算法,该方法通过计算位于相邻截面上的各外接圆间的对应关系来确定轮廓间的对应,最终实现表面重建,比圆盘法计算速度快。

本文算法是用一系列外接圆来表示轮廓,主要包括两个步骤:1)对分类后的轮廓进行三角剖分,并将所得的三角形合法化后提取其外接圆;2)计算位于相邻截面上的外接圆间的局部对应关系,此后通过轮廓类别作为限制条件来确定位于相邻截面上的轮廓间的对应。

## 1 轮廓分类与外接圆提取

### 1.1 轮廓分类

假设二维轮廓所在平面平行于XY平面,所有轮廓都可依据若当曲线定理<sup>[12]</sup>按射线相交法被分成最外层轮廓和内部嵌套轮廓。这些轮廓的嵌套层次可按照下述方法被标记和整理。

1) 先设所有轮廓 $C_i$ 的标记值 $N_i = 0$ ,且当前最大标记值 $N = 0$ 。所有具有 $X$ 或 $Y$ 极大极小值的轮廓被定义为最外层种

收稿日期:2011-08-16;修回日期:2011-11-08。

基金项目:教育部留学回国人员科研启动基金资助项目(K314020901);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(Z109021004)。

作者简介:陈敏(1986-),女,陕西宝鸡人,硕士研究生,主要研究方向:图形学、虚拟现实; 张志毅(1974-),男,山西运城人,副教授,博士,主要研究方向:计算机辅助设计、计算机辅助几何设计、计算机图形学; 田素垒(1987-),男,山东菏泽人,硕士研究生,主要研究方向:图形学、虚拟现实; 张娴(1987-),女,贵州安顺人,硕士研究生,主要研究方向:图形学、虚拟现实。

子轮廓,它们是最外层轮廓的特例,也是轮廓分类的基础标记。

2) 若自某轮廓上一点的射线与最外层种子轮廓相交偶数次,则其为最外层轮廓;否则为内部嵌套轮廓。最外层(种子)轮廓  $C_j$  通常被标记为  $N_j = 1$ , 当前最大标记值为  $N = N + 1$ 。

3) 所有未被标记的具有  $X$  或  $Y$  极大极小值的内部嵌套轮廓被定义为内部嵌套种子轮廓  $C_k$ , 并将它们标记为  $N_k = N + 1$ , 修改当前最大标记值为  $N = N + 1$ 。

4) 在某未被标记的内部嵌套轮廓  $C_n$  上任取一点画一射线,若射线与已标记轮廓  $C_m$  相交奇数次且  $C_m$  具有当前最大标记值,则该内部嵌套轮廓  $C_n$  被标记为  $N_n = N + 1$ 。

5) 重复执行第 3) ~ 4) 步直到所有的轮廓都被标记。

对每一轮廓  $C_i$ , 设  $K_i = N_i \% 2$ , 当  $K_i = 1$  时按逆时针方向整列; 否则按顺时针方向整列。为保证重构后形状的正确性, 仅在单向的  $K_i = 1 \mapsto K_j = 0$  或  $K_i = 0 \mapsto K_j = 1$  空间中进行形状剖分。

### 1.2 二维轮廓的三角剖分与三角形合法化

二维轮廓的三角剖分方法<sup>[13]</sup>比较成熟,这里不赘述。为使每个外接圆能充分表示轮廓的内部区域,避免出现狭长的三角形,采用最小角最大化的 Delaunay 约束条件方法<sup>[14-15]</sup>对三角形进行合法化。具体操作如下:对剖分得到的三角形,每两个邻接的可以组成一个四边形,如图 1(a) 所示,  $\triangle ABD$  与  $\triangle ACD$  分别为两个三角形,先计算比较得到 6 个角中的最小角  $\angle\alpha$ ; 若去掉对角线  $AD$ , 连接  $BC$  则可得到如图 1(b) 所示的两个三角形  $\triangle ABC$  和  $\triangle DBC$ , 计算比较得到 6 个角的最小角  $\angle\beta$ 。若  $\angle\beta$  小于  $\angle\alpha$ ,  $\triangle ABD$  和  $\triangle ACD$  为合法化后的三角形; 否则,  $\triangle ABC$  和  $\triangle DBC$  为合法化后的三角形。

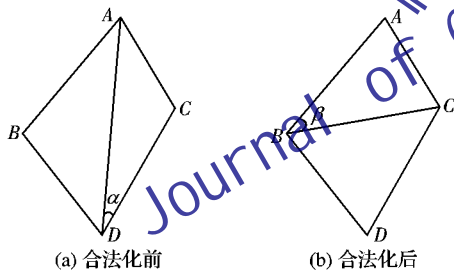


图 1 三角形合法化示例

### 1.3 提取三角形的外接圆

若  $\triangle ABC$  的 3 个顶点坐标已知, 则可计算得到其外接圆的圆心坐标和半径。图 2 显示了提取外接圆的一个实例。

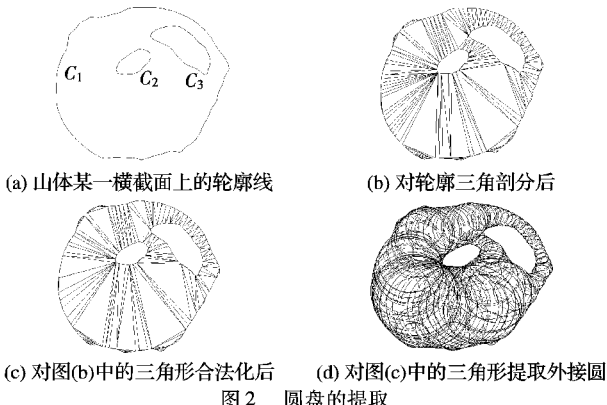


图 2 圆盘的提取

图 2(a) 显示在某一平面中有 3 条轮廓  $C_1, C_2, C_3$ 。按照本文方法分类的结果为:  $N_1 = 1$  且  $K_1 = 1, C_1$  为外层轮廓;  $C_2 = C_3 = 2, K_2 = K_3 = 0, C_2$  和  $C_3$  为内部嵌套轮廓。图 2(b) 显示

了使用本文算法在单向空间  $K_i = 1 \mapsto K_j = 0$  中进行三角剖分的结果。图 2(c) 是对图 2(b) 中得到的三角形合法化后的结果。图 2(d) 为对合法化后的三角形提取的一系列外接圆。

## 2 轮廓间的对应算法

### 2.1 外接圆间局部对应关系的权重

当要计算位于截面  $A$  上的外接圆  $a$  到其相邻截面  $B$  的对应向量时需先计算  $a$  与  $B$  上的每个外接圆  $b$  间对应关系的权重。将  $a$  投影到  $B$  平面后可用式(1) 计算  $a$  与  $b$  间对应关系的权重:

$$\omega_b = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon + \mu}, & \varepsilon < r_a \text{ 且 } \varepsilon < r_b \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\mu$  取一个很小的值以防止无限加权;  $\varepsilon = |\vec{l}_{ab}| - (r_a + r_b)$ ,  $\vec{l}_{ab}$  是自  $a$  圆心指向  $b$  圆心的向量,  $|\vec{l}_{ab}|$  是  $\vec{l}_{ab}$  的模;  $r_a$  与  $r_b$  分别为  $a$  和  $b$  的半径。若  $\varepsilon$  同时小于  $r_a$  与  $r_b$ , 则认为这两个外接圆间具有对应关系, 如图 3(a) 所示; 否则认为这对外接圆间无对应关系, 权重为 0, 如图 3(b) 所示。

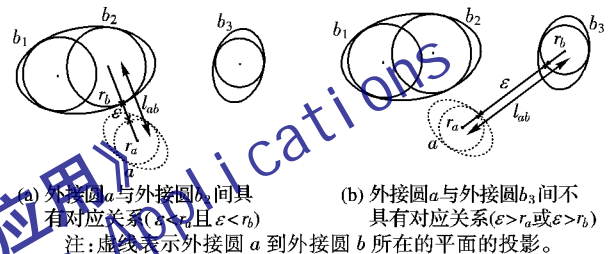


图 3 外接圆间对应关系的计算

### 2.2 外接圆间的对应

在得到外接圆  $a$  与截面  $B$  上每一个外接圆间的对应关系权重后, 利用式(2) 将  $a$  到截面  $B$  上的每一个外接圆的对应向量加权求和, 得到  $a$  到截面  $B$  的对应向量:

$$\vec{C}_a = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{b \in discs} \omega_b} \sum_{b \in discs} \omega_b \vec{l}_{ab}, & \sum_{b \in discs} \omega_b > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $\vec{C}_a$  表示外接圆  $a$  到其相邻截面  $B$  的对应向量,  $\omega_b$  表示  $a$  与  $b$  间对应关系的权重,  $discs$  表示位于截面  $B$  上的所有外接圆。由式(2) 可计算得到  $\vec{C}_a$  的终点坐标。然后计算它与  $B$  上各外接圆圆心间的欧氏距离, 哪个外接圆的圆心坐标到向量  $\vec{C}_a$  的终点坐标的欧氏距离最小, 就认为截面  $B$  上的此外接圆与外接圆  $a$  具有对应关系。以此可确定各外接圆所属轮廓间的部分对应关系。

### 2.3 轮廓间的对应

每一外接圆必过确定该外接圆的三角形的 3 个顶点, 通过判断这 3 个点分别归属于哪个轮廓来确定该外接圆归属于哪个轮廓: 一个外接圆至少归属于一个轮廓, 最多同时归属于 3 个轮廓。为避免可能会存在存在一个或多个内部嵌套轮廓时产生错误的对应结果, 本文规定: 位于相邻截面上的一对轮廓, 若它们中的某两个外接圆间存在对应关系、方向同为逆时针或顺时针且标记值相同, 则认为这对轮廓对应。此后即可在对应轮廓间生成三角网格, 构造研究对象的三维表面形状。

## 3 实验结果及分析

为测试本文所提的轮廓对应方法的效果, 实验选取了几组有特征的研究对象, 采用本文方法进行了处理后, 采用剖分算法<sup>[16]</sup> 在对应轮廓间生成三角网格, 获得了研究对象的三维

形状。实验结果如图 4~6 所示。图 4 中显示了对轮廓投影相交叉的研究对象的处理过程及结果。图 5 中显示了对存在三分支的铁塔的处理过程及结果,图 5(d)的重构结果表明本文方法能很好地处理有分支的研究对象。因外接圆法具有部分对应特性,使得位于同一截面上的 3 个小轮廓可以分别与其相邻截面上大轮廓中的部分区域对应。图 6 中显示了对存在嵌套轮廓的南瓜的处理过程及结果,图 6(d)中的重构结果表明本文方法在处理有嵌套轮廓的研究对象时能够得到理想的结果。因存在嵌套轮廓,外接圆表示每一截面上的环形区域,若仅基于外接圆间的对应来判定,可能会产生某一截面的外部轮廓与其相邻截面的内部嵌套轮廓对应的错误结果,因此本文规定对应轮廓的方向及标记值必须相同,从而使位于相邻截面上的外部轮廓和内部嵌套轮廓分别准确地对应。

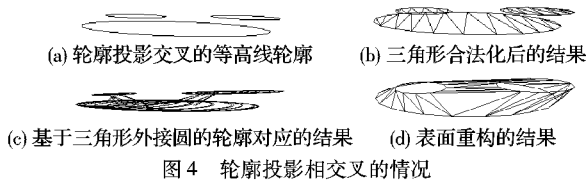


图 4 轮廓投影相交叉的情况

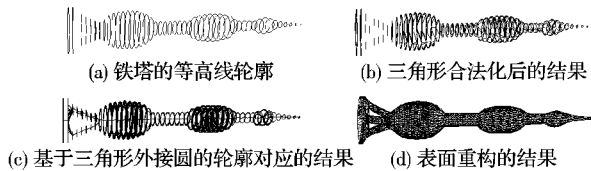


图 5 铁塔的三维重建

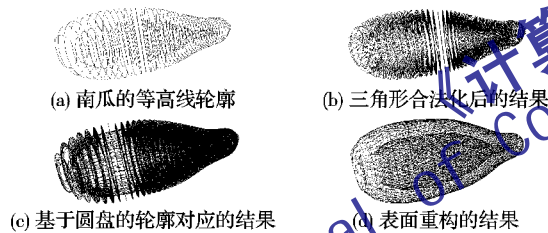


图 6 南瓜的三维重建

轮廓对应部分的复杂度分析:设研究对象有  $m$  个横截面,每一横截面上有  $p$  个点、 $q$  个圆盘。Treece 等所提算法在计算得到每一圆盘的对应向量之后,对位于每一横截面上的各圆盘的对应向量加权求和得到位于该截面上的各点的插值方向。计算每一点的插值方向时都要对  $q$  个圆盘加权求和,需循环  $q$  次,而每一截面上有  $p$  个点,每一研究对象有  $m$  个横截面,因此圆盘法的时间复杂度为  $O(mpq)$ ;本文算法是根据三角形外接圆间是否存在对应关系来确定其所归属的轮廓间的对应,由于各外接圆必经轮廓上的 3 个点,首先通过判断外接圆上的各点分别归属于那个轮廓来确定外接圆归属于那个轮廓,然后根据外接圆间是否具有对应关系来确定其所归属的轮廓间是否存在对应关系,每一截面上有  $q$  个外接圆,判断外接圆归属于那个轮廓需要  $q$  次,而研究对象共有  $m$  个横截面,因此三角形外接圆法的时间复杂度为  $O(mq)$ 。另外,圆盘法需要记录位于不同截面上的各点的插值方向,而三角形外接圆法只需记录位于不同截面上的各轮廓分别与哪个轮廓对应。因点的个数远大于轮廓及圆盘的个数,因此本文算法具有较高的计算效率,并且数据存储量也比较小。

#### 4 结语

本文采用三角形外接圆法来确定位于相邻截面上的轮廓间的对应关系。在测试阶段,选取了 10 组各有特征(分别为

轮廓投影交叉的研究对象、建筑物、山体、南瓜、莲藕、铁塔等)的数据分别进行测试,实验结果表明,对于形状差异较大且截面上的二维轮廓拓扑结构不一致(如含有嵌套轮廓和分支轮廓)的研究对象,采用三角形外接圆法均能得到理想的对应结果。本文算法的优点在于:采用三角形外接圆法得到的是轮廓中部分区域的对应,允许存在非对应区域,利用该部分对应特性,能够快速准确地处理研究对象中存在分支和嵌套轮廓的问题;本文算法的缺陷在于:若研究对象中存在凹轮廓,在进行三维表面重构时采用空间剖分可能会产生错误的结果,只能采用二维平面的剖分算法,但这不会影响后续的表面插值。

#### 参考文献:

- [1] 唐泽圣. 三维数据场可视化[M]. 北京:清华大学出版社,1999.
- [2] OWADA S, SHINAGAWA Y, NIELSEN F. Enumeration of contour correspondence [J]. International Journal of Image and Graphics, 2003, 3(4): 609-627.
- [3] SHINAGAWA Y, KUNII T L. Constructing a Reeb graph automatically from cross sections [J]. IEEE Computer Graphics and Applications, 1991, 11(6): 44-51.
- [4] ATTENE M, BIASOTTI S, SPAGNUOLO M. Shape understanding by contour-driven retiling [J]. The Visual Computer, 2003, 19(2): 127-138.
- [5] MEYERS D, SKINNER S, SLOAN K. Surface from contours [J]. Transactions on Graphics, 1992, 11(3): 228-258.
- [6] MEYERS D. Reconstruction of surface from planar contours [D]. Seattle: University of Washington, 1994.
- [7] NIMOTO T, YASUDA Y. Shape description and representation by ellipsoids [J]. Signal Processing: Image Communication, 1997, 9(3): 275-290.
- [8] PARK H, KIM K. 3-D shape reconstruction from 2-D cross-sections [J]. Journal of Design and Manufacturing, 1995(5): 171-185.
- [9] BAJAJ C L, BERNARDINI F, XU G L. Automatic reconstruction of surfaces and scalar fields from 3D scans[C]// SIGGRAPH '95: Proceedings of the 22nd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York: ACM Press, 1995: 109-118.
- [10] 董育宁, 杨铁, 陈文. 一种断层图像间复杂轮廓的三维重建方法 [J]. 中国生物医学工程学报, 2007, 26(3): 379-383.
- [11] TREECE G M, PRAGER G R, GEE A H, et al. Surface interpolation from sparse cross sections using region correspondence [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2000, 19(11): 1106-1114.
- [12] 柯朗 R, 罗宾 H. 什么是数学[M]. 左平, 张饴慈, 译. 上海:复旦大学出版社, 2005: 314-316.
- [13] ZHANG Z Y, KONNO K, TOKUYAMA Y. Curve mesh reconstruction based on mountain contours [J]. The Journal of the Institute of Image Information and Television Engineers, 2006, 60(11): 1803-1810.
- [14] WANG D, HASSAN O, MORGAN K, et al. Efficient surface reconstruction from contours based on two-dimensional Delaunay triangulation [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 65(5): 734-751.
- [15] EGUCHI G. Delaunay triangulations[EB/OL]. [2010-10-10]. <http://groups.csail.mit.edu/graphics/classes/6.838/F01/lectures/Delaunay/Delaunay2D.ppt>.
- [16] WANG Z H, GENG N, ZHANG Z Y. Surface mesh reconstruction based on contours [C]// CISE 2009: International Conference on Computational Intelligence and Software Engineering. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2009: 1-4.